17/05/2018

Μάθημα 11ο
Στατιστική Συμπερασματολογία

$\boxed{\text{Τεστ πηλίκου πιθανοφανειών}}$

Έχουμε ένα τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από την $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$

Θέλουμε να ελέγξουμε την $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$

έναντι της $H_a : \theta \in \Theta_a$

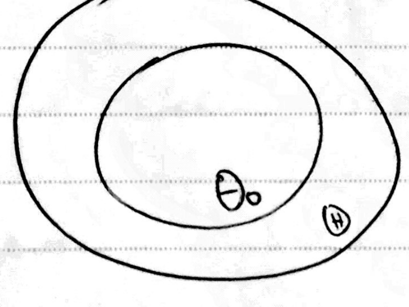
Το σύνολο που προκύπτει από τον περιορισμό της υποθ. H_0.

$$\lambda = \frac{\max_{\theta \in \Theta_0} f(\underset{\sim}{x}, \theta)}{\max_{\theta \in \Theta} f(\underset{\sim}{x}, \theta)} = \frac{\max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta / \underset{\sim}{x})}{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta / \underset{\sim}{x})}$$

← μεγιστοποιώ ως προς την H_0

μεγιστοποιώ σε όλο τον παραμετρικό χώρο

Παρατήρηση: Ποιες οι δυνατές τιμές του λ;



$$0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta / \underset{\sim}{x}) \leq \max_{\theta \in \Theta}$$

μεγιστοποίηση: $\theta \in \Theta_0 \simeq \theta \in \Theta$

Κριτήριο απόρριψης: $\lambda \leq \kappa$.

Απορρίπτω την H_0 για μικρές τιμές του λ

Μικρές τιμές του $\lambda \Rightarrow$ αριθμητής $\ll$ παρανομαστή

$\Rightarrow$ το $\theta \in \Theta_0$ απέχει από το $\theta \in \Theta \Rightarrow$ γι αυτό απόρριψη

Προσδιορισμός του κ:

Το κ είναι τ/ω : $P(\text{απορ. } H_0 / H_0 \text{ αληθής}) = \kappa$.

$\Rightarrow P(\lambda \leq \kappa / H_0 \text{ αληθής}) = \alpha$

Παρατήρηση:

Για να προσδιοριστεί η σταθερά κ πρέπει κάποιος να μπορεί να προσδιορίσει την κατανομή του λ όταν η H_0 είναι αληθής. Ο προσδιορισμός αυτός κάποιες φορές δεν είναι εφικτός. Αποδεικνύεται τότε ότι, υπό κάποιες συνθήκες ομαλότητας, η ποσότητα - σ.σ. :

$$-2\ln\lambda \overset{\text{ασυμπτ.}}{\underset{H_0}{\sim}} \chi^2_{r-s}$$

όπου r είναι η διάσταση του παραμετρικού χώρου Θ
και s είναι ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων οι οποίες καθορίζονται από την $H_0 : \theta \in \Theta_0$

Περιοχή απόρριψης;

$$\lambda \leq k \Rightarrow -2\ln\lambda \geq k' \qquad (k' = -2\ln k)$$

όπου k' τ/ω : $P(\text{απορ } H_0 \,/\, H_0 \text{ αληθής}) = k' \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(-2\ln\lambda \geq k' \,/\, H_0 \text{ αληθής}) = a$$

$$k' = \chi^2_{r-s,a} \quad \text{αφού} \quad -2\ln\lambda \overset{\text{ασυμπτ.}}{\sim} \chi^2_{r-s,a}$$

Άρα:
- Υπολογίζω τα μέγιστα
- Βρίσκω κατανομή του λ.
- Αν δεν μπορώ, εφαρμόζω την παρατήρηση

Παράδειγμα 1

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από την $N(\mu, \overset{\varphi}{\overset{\|}{\sigma^2}})$ με μ, σ^2: άγνωστα

Θέλουμε να κάνουμε τον έλεγχο της υπόθεσης:

$H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι $H_a : \mu \neq \mu_0$

Λύση

$1^{ο}$: Βρίσκω συνάρτηση πιθανοφάνειας.

$$L(\theta / x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod (2\pi\varphi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\varphi}(x_i-\mu)^2} =$$

$$= (2\pi\varphi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\varphi}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \quad (\varphi > 0, \mu \in \mathbb{R})$$ όλος ο παραμ. χώρος.

Για εμάς το θ είναι το: $\theta = (\mu, \varphi)$

$\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

Θα μεγιστοποιήσω ισοδύναμα προς μ και φ την:

$\ln L(\theta / x)$ $\left(\text{αντί της: } \max_{\theta \in \Theta} L(\theta / x)\right)$.

$$\Rightarrow -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\varphi - \frac{1}{2\varphi}\sum (x_i-\mu)^2$$

- Παραγωγίζω ως προς μ:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\theta / x) = \frac{2}{2\varphi}\sum(x_i-\mu) \Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial\mu} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X} \quad (\text{μέγιστο})$$

Παραγωγίζω ως προς φ:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln L(\theta/x) = -\frac{n}{2}\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi^2}\Sigma(x_i-\mu)^2 \Rightarrow \hat{\varphi} = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

Άρα βρήκαμε τον εκτίμητή της μέγιστης πιθανοφάνειας σε όλον τον παραμετρικό χώρο.

Θα βάλω στη θέση του $\theta(\mu,\varphi)$ τους εκτιμητές $\hat{\mu}$, $\hat{\varphi}$ που βρήκα. στο μέγιστο.

$$L(\theta/x) = (2\pi\varphi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\varphi}\Sigma(x_i-\mu)^2} \xrightarrow{\text{μεγιστοποιώ και βάζω } \hat{\mu},\hat{\varphi}}$$

$$\boxed{\max_{\theta\in\Theta} L(\theta/x) = (2\pi\hat{\varphi})^{-n/2} e^{-n/2}}$$

βρήκα τον παρανομαστή του λ.

<u>Τώρα:</u> $\theta\in\Theta_0$ σημαίνει: $(\mu,\varphi) = (\mu_0,\varphi)$ με μ_0 γνωστό (είμαστε στην μηδενική υπόθεση $H_0: \mu=\mu_0$ (γνωστό))

Θέλουμε:

$$\max_{\theta\in\Theta_0} L(\theta/x) = \max_{\varphi>0}(2\pi\varphi)^{-n/2}\cdot e^{-\frac{1}{2\varphi}\Sigma(x_i-\mu_0)^2}$$

Ομοίως τώρα, μεγιστοποιώ $\overset{\text{ως προς } \varphi}{\text{τον}}$ λογάριθμο $\ln L(\theta/x)$:

$$\ln L(\theta/x) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{\varphi}\ln\varphi - \frac{1}{2\varphi}\Sigma(x_i-\mu_0)^2$$

Τότε προκύπτει μετά απο άλγεβρα: $\tilde{\varphi} = \frac{\Sigma(x_i-\mu_0)^2}{n}$
(1η παράγωγος και μηδενισμός αυτής)

Άρα: $\max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta/X) = (2\pi\tilde{\varphi})^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\tilde{\varphi}}\Sigma(X_i-\mu_0)^2}$

Όμως $\Sigma(X_i-\mu_0)^2 = n\tilde{\varphi}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta/X) = (2\pi\tilde{\varphi})^{-n/2} \cdot e^{-n/2}.$$

Ουσιαστικά μέχρι στιγμής:
μεγιστοποίησα τη συνάρτηση πιθανοφάνειας
ως προς την H_0 και ως προς τον Θ

Άρα: $$\lambda = \frac{(2\pi\tilde{\varphi})^{-n/2} \cdot e^{-n/2}}{(2\pi\hat{\varphi})^{-n/2} \cdot e^{-n/2}} \Rightarrow \boxed{\lambda = \left(\frac{\hat{\varphi}}{\tilde{\varphi}}\right)^{n/2}}$$

Απορρίπτω την H_0 όταν: $\lambda \leq k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\hat{\varphi}}{\tilde{\varphi}}\right)^{n/2} \leq k.$$ για μικρές τιμές του λ.

προσπαθώ να κάνω όσες πράξεις γίνεται για να βρω την κατανομή του λ

$$\Rightarrow \frac{\hat{\varphi}}{\tilde{\varphi}} \leq k_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}{n}}{\frac{\Sigma(X_i-\mu_0)^2}{n}} \leq k_1 \Rightarrow \frac{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}{\Sigma(X_i-\mu_0)^2} \leq k_1$$

Όμως: $\Sigma(X_i-\mu_0)^2 = \Sigma(\underbrace{X_i-\bar{X}} + \underbrace{\bar{X}-\mu_0})^2 =$

$$= \Sigma (X_i - \bar{X})^2 + 2\Sigma (X_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu_0) + \Sigma (\bar{X} - \mu_0)^2 =$$

$$= \Sigma (X_i - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - \mu_0) \cdot \underbrace{\Sigma (X_i - \bar{X})}_{=0} + n(\bar{X} - \mu_0)^2 =$$

$$\Sigma (X_i - \bar{X}) = \Sigma X_i - n\bar{X} = n\bar{X} - n\bar{X} = 0$$

$$= \Sigma (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu_0)^2$$

<u>Άρα:</u> $\Lambda = \dfrac{\Sigma (X_i - \bar{X})^2}{\Sigma (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu_0)^2} \leq K_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\Sigma (X_i - \bar{X})^2}{\Sigma (X_i - \bar{X})^2 \left\{ 1 + n \dfrac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{\Sigma (X_i - \bar{X})^2} \right\}} \leq K_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + n \dfrac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{\Sigma (X_i - \bar{X})^2}} \leq K_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + n \frac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{\Sigma (X_i - \bar{X})^2} \geq K_2 \ (= 1/K_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n \frac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} \geq K_3}$$

Πρέπει να προσδιορίσω την κατανομή
2 τρόποι προσέγγισης.

1ος τρόπος : k_3 είναι τ/ω :

$$P\left(n\frac{(\bar{X}-\mu_0)^2}{\Sigma(X_i-\bar{X})^2} \geq k_3 \,/\, \underset{\delta\eta\lambda\alpha\delta\eta\ \mu=\mu_0}{\text{όταν } H_0 \text{ αληθής}} \right) = \alpha$$

- Έχω $X_1, X_2, \dots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$

Τότε γνωρίζω ότι: $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\Rightarrow \bar{X} \overset{H_0}{\sim} N(\mu_0, \sigma^2/n) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{X}-\mu_0)^2}{\sigma^2/n} \overset{H_0}{\sim} \chi^2_1$$

- Γνωρίζουμε ότι όταν έχω δειγματοληψία από την $N(\mu, \sigma^2)$

ισχύει: $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

- Επειδή $\bar{X}$ και S^2 ανεξάρτητα ισχύει ότι:

$$\frac{\dfrac{(\bar{X}-\mu_0)^2}{\sigma^2/n} \Big/ \overset{\beta\epsilon.}{1}}{\dfrac{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \Big/ (n-1)} \overset{H_0}{\sim} F_{1,n-1}.$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{X}-\mu_0)^2}{\Sigma(X_i-\bar{X})^2} \cdot \frac{(n-1)}{n} \overset{H_0}{\sim} F_{1,n-1}$$

(Σκοπός → να φτιάξουμε την κρίσιμη περιοχή)

$$P\left(\underbrace{\frac{(n-1)}{n} \frac{(\bar{X}-\mu_0)^2}{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}}_{F_{1,n-1}} \geq K_4 \,/\, H_0 \text{ αληθής} \right) = a$$

Άρα: $\boxed{K_4 = F_{1,n-1,a}}$

Επομένως: Η περιοχή απόρριψης (ή κρίσιμη περιοχή) είναι :

$$\frac{(n-1)}{n} \frac{(\bar{X}-\mu_0)^2}{\Sigma(X_i-\bar{X})^2} \geq F_{1,n-1,a}$$

2ος τρόπος

Έχουμε: $n\dfrac{(\bar{X}-\mu_0)^2}{\Sigma(X_i-\bar{X})^2} \geq K_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sqrt{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}} \geq K_5 \quad (*)$$

Προσδιορίζουμε κατανομές

$$\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_\nu/\nu}} \sim t_\nu$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1) \\ &\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1} \Rightarrow$$

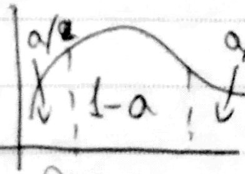
$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu_0}{S} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}}$$

$$(*) \Rightarrow \sqrt{n}\,\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sqrt{(n-1)S^2}} \geq k_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{S} \geq k_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\,\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{S} \geq k_6$$

Επομένως: $k_6 = t_{n-1,\alpha/2}$ λόγω συμμετρίας



(απόλυτο)

$$P\left(\sqrt{n}\,\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{S} \geq k_6\right) = \alpha.$$

Επομένως τα δύο τεστ είναι ισοδύναμα

$F_{1,n-1} = t^2_{n-1}$

Άσκηση για το σπίτι:

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$ σ^2: γνωστό

Ομοίως με πριν.

1^o τεστ → με κανονική κατανομή

2^o τεστ → με X_v^2 κατανομή

Παράδειγμα 2^o

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. Poisson (m_1) } ανεξάρτητα

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ τ.δ Poisson (m_2) } μεταξύ τους.

αριθμός πραγμάτων στην μονάδα του χρόνου (αφίξεις)

$H_0: m_1 = m_2$

$H_a: m_1 \neq m_2$

Λύση.

$$L(\theta / \underline{X}, \underline{Y}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta_1) \cdot \prod_{i=1}^{n} g(y_i/\theta_2)$$

Για να βρω την συνολική συνάρτηση πιθανοφάνειας παίρνω το γινόμενο της από κοινού κατανομής του ενός τ.δ. επί την από κοινού κατανομή του άλλου τ.δ. (Τα δείγματα δε χρειάζεται να έχουν ίδιο πλήθος παρατηρήσεων)

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{m_1^{x_1} \cdot e^{-m_1}}{x_i!} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{m_2^{y_i} e^{-m_2}}{y_i!} \Rightarrow$$

$$L = \frac{m_1^{\Sigma x_i} e^{-n m_1} \, m_2^{\Sigma x_i} e^{-n m_2}}{\prod x_i! \, \prod y_i!}$$

Θέλω να τη μεγιστοποιήσω ως προς m_1 και m_2

$1o$ $2o$

$$\max_{m_1, m_2} L = ;.$$

Ισοδύναμα αναζητώ maximum ως προς m_1, m_2 της:

$$\ln L = \Sigma X_i \ln m_1 - n m_1 + \Sigma Y_i \ln m_2 - n m_2 + \text{σταθ.}$$

Παραγωγίζω ως προς m_1 και μετά ως προς m_2:

$$\frac{d}{dm_1} \ln L = \frac{\Sigma X_i}{m_1} - n \Rightarrow \hat{m}_1 = \bar{X}$$

$$\frac{d}{dm_2} \ln L = \frac{\Sigma Y_i}{m_2} - n \Rightarrow \hat{m}_2 = \bar{Y}$$

Άρα: $$L \underset{(H_0)}{\overset{m_1 = m_2 = m}{=}} \frac{m^{\Sigma X_i + \Sigma Y_i} e^{-2nm}}{\Pi X_i! \, \Pi Y_i!}$$

$$\max_{m} L = ;$$

$$(\Sigma X_i + \Sigma Y_i) \ln m - 2nm = \frac{d \ln L}{dm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{m} = \frac{\Sigma X_i + \Sigma Y_i}{2n} = \frac{n\bar{X} + n\bar{Y}}{2n} = \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{m} = \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}}$$

Άρα: $$\lambda = \frac{\tilde{m}^{\Sigma x_i + \Sigma y_i} \cdot e^{-2n\tilde{m}}}{\hat{m}_1^{\Sigma x_i} e^{-n\hat{m}_1} \cdot \hat{m}_2^{\Sigma y_i} e^{-n\hat{m}_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\left(\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}\right)^{n(\bar{x}+\bar{y})} e^{-2n\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}}}{\bar{x}^{n\bar{x}} \cdot e^{-n\bar{x}} \cdot \bar{y}^{n\bar{y}} \cdot e^{-n\bar{y}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\left(\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}\right)^{n(\bar{x}+\bar{y})}}{\bar{x}^{n\bar{x}} \cdot \bar{y}^{n\bar{y}}}$$

Δεν είναι εφικτός ο προσδιορισμός της ακριβής κατανομής υπό την H_0

$\Downarrow$ λύση:

Παίρνω: $$-2\ln\lambda \geq X^2_{1,a} \quad \text{(ασυμπτωτικά)}$$

$r = 2$ ($\leftarrow$ έχω 2 παραμέτρους)

$s = 1$ ($\leftarrow$ εκτιμήσαμε μόνο μια παράμετρο)

$r - s = 1$

Άσκηση 3.13

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ. $f(x;\theta) = \theta \cdot x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$.

Ισχυρότατο τεστ ; $\Rightarrow$ Θεμελιώδες λήμμα Neimann Pearson

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_a: \theta = \theta_1 < \theta_0$

Λύση

$$\frac{L_0}{L_a} \leq K \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x,\theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x,\theta_1)} \leq K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta_0 x_i^{\theta-1}}{\prod_{i=1}^{n} \theta_1 x_i^{\theta_1-1}} \leq K \Rightarrow \frac{\theta_0^n (\prod x_i)^{\theta_0-1}}{\theta_1^n (\prod x_i)^{\theta_1-1}} \leq K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta_0-\theta_1} \leq K_1 \Rightarrow (\theta_0-\theta_1) \ln \prod x_i \leq K_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\theta_0-\theta_1) \sum_{i=1}^{n} \ln X_i \leq K_2 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \leq K_3}$$

Θέλω K_3 τ/ω : $P(\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \leq K_3 / H_0 \text{ αληθής}) = a$.

Ζητάω την κατανομή του $\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$

Θέτω $Y = -\ln X$ επειδή $X \in (0,1) \Rightarrow \ln X < 0$ και μας συμφέρει $-\ln X > 0$ διότι έχουμε για θετικά γνωστά στο φυλλάδιο.

$$\ln X = -Y \Rightarrow \boxed{X = e^{-Y}} \Rightarrow dX = -e^{-Y} dy$$

$$\left|\frac{dX}{dy}\right|$$

$$f(y) = f_x(e^{-y})\,|-e^{-y}| = \theta \cdot e^{-y(\theta-1)} e^{-y} =$$
$$= \theta \cdot e^{-y\theta}, \quad y>0$$

Άρα: $Y \sim \text{Εκθ}(\theta)$

$$P(\sum \ln X_i \leq k_3 \,/\, H_0 \text{ αληθής}) = a \Rightarrow$$
$$P(-\sum \ln X_i \geq k_4 \,/\, H_0 \text{ αληθής}) = a \Rightarrow \quad Y_i = -\ln X_i$$
$$P(\sum Y_i \geq k_4 \,/\, \underbrace{Y_i \sim \text{Εκθ}(\theta_0)}) = a \Rightarrow$$

Αφού H_0 αληθής: $\theta = \theta_0$

$$P\left(\sum Y_i \geq k_4 \,/\, \sum Y_i \sim \text{Γάμμα}\left(n, \frac{1}{\theta_0}\right)\right) = a$$

Όταν εμφανίζεται Γάμμα κατανομή θέλω να πάω στην X^2_v ⇒ Πολ/ζω με $2\theta_0$ (⇒ παίρνω X^2_{2v})

$$P\left(2\theta_0 \sum Y_i \geq 2\theta_0 k_4 \,/\, 2\theta_0 \sum Y_i \sim X^2_{2n}\right) = a$$

Άρα: $\boxed{2\theta_0 k_4 = X^2_{2n,a}}$

Επομένως, κρίσιμη περιοχή:

$$\boxed{2\theta_0 \sum Y_i \geq X^2_{2n,a}}$$

2ος τρόπος: $-2\sum \log F(x_i,\theta) \sim X^2_{2n}$

$$F(x,\theta) = \int_0^x \theta y^{\theta-1}\, dy = y^\theta \Big|_0^x = x^\theta, \quad 0<x<1$$

Άρα: $-2\theta \sum \log X_i \sim X^2_{2n}$

Άσκηση 3.9.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $B(1,\theta)$

$f(x,\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$, $x=0,1$

I ΤΕΕΣ, $a = 0{,}2517$

$H_0: \theta = 1/2 = \theta_0$

$H_a: \theta = 1/4 = \theta_1 \quad (\theta_1 < \theta_0)$

Ισχυρότατο;

Λύση

$$\frac{L_0}{L_a} \leq K \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta_0^{x_i} (1-\theta_0)^{1-x_i}}{\prod_{i=1}^{n} \theta_1^{x_i} (1-\theta_1)^{1-x_i}} \leq K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\Sigma x_i} \frac{(1-\theta_0)^{n-\Sigma x_i}}{(1-\theta_1)^{n-\Sigma x_i}} \leq K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\theta_0}{\theta_1} \cdot \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{\Sigma x_i} \leq K_1 \Rightarrow$$

$$\rightarrow \Sigma x_i \ln\left(\frac{\overset{1/2}{\theta_0}}{\underset{1/4}{\theta_1}} \frac{\overset{3/4}{1-\theta_1}}{\underset{1/2}{1-\theta_0}}\right) \leq K_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma x_i \leq K_3}$$

Άρα: $0{,}2517 = P(\Sigma X_i \leq K_3 \,/\, X_i \sim B(1, \overset{\theta_0 \text{ λόγω } H_0 \text{ αλ.}}{1/2})) \Rightarrow$

$0{,}2517 = P(\Sigma X_i \leq K_3 \,/\, \underbrace{\Sigma X_i \sim B(n=20, 0{,}5)}_{\text{με ραπογεννήτριες}})$

εντος: 3.14, 3.15, 3.16.
εκτος 3.21.

Επομένως $k_3 = 8$

και Κ.Π. : $\sum X_i \leq 8$

ισχύς = P(απορ H_0 / H_a αληθής) =
$= P\left(\sum X_i \leq 8 \,/\, \sum X_i \sim B(20, \underbrace{0.25}_{\theta_1 \text{ αφού } H_a \text{ αληθής}})\right) = 0,9591$

Άσκηση 3.10

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $G(a=3, \theta)$

$f(x,\theta) = \dfrac{x^2 e^{-x/\theta}}{\theta^3 \Gamma(3)}, \; x \geq 0$ ($\Gamma(3) = 6$)

(Θέλει απλή προς σύνθετη) Να βρεθεί το ομοιομόρφως ισχυρότ.
Θέλω να ελέγξω $\begin{cases} H_0 : EX^3 = 15/2 \\ H_a : EX^3 > 15/2 \end{cases}$

Λύση.
$EX^3 = ;$ Για να το ζητάει σημαίνει ότι έχει μέσα κάτι θ μας.

$$EX^3 = \int_0^{+\infty} x^3 \frac{x^2 \cdot e^{-x/\theta}}{\theta^3 \Gamma(3)} dx$$

(ή με 3η παράγωγος ροπογεννήτρια και παίρνω t=0).

Θέλω να εμφανίσω μέσα σ.π.π. γνωστής κατανομής
και όχι με μεθόδους αντιπαραγώγου

Κοιτάω αυτές που έχουν π.ο. το $(0, +\infty) \to$ ~~εκθετική~~ $\to$ Γάμμα

$$EX^3 = \frac{1}{\theta^3 \Gamma(3)} \int_0^{+\infty} x^5 e^{-x/\theta} dx \Rightarrow$$

$\beta = \theta$
$a = 6$

$$EX^3 = \frac{\theta^6 \Gamma(6)}{\theta^3 \Gamma(3)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{6-1} e^{-x/\theta}}{\theta^6 \Gamma(6)} dx \Rightarrow$$

$$EX^3 = \frac{\theta^3 \Gamma(6)}{\Gamma(3)} = \frac{\theta^3 \cdot 5!}{2!} = \theta^3 \cdot 60 \Rightarrow \boxed{EX^3 = \theta^3 60}$$

Επομένως. $EX^3 = \frac{15}{2} \Rightarrow \theta^3 \cdot 60 = \frac{15}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{1}{2}}$

Συνεπώς έχω: $H_0 : \theta = 1/2 \ (= \theta_0)$
$H_a : \theta > 1/2$

Απλή προς σύνθετη.
$H_0 : \theta = \theta_0$
$H_0 : \theta = \theta_1 \ (\theta_1 > \theta_0)$

$$\frac{L_0}{L_a} \leq K \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 e^{-X_i/\theta_0}}{\theta_0^3 \Gamma(3)}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 e^{-X_i/\theta_1}}{\theta_1^3 \Gamma(3)}} \leq K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{3n} \cdot e^{-\Sigma X_i \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)} \leq K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma X_i \geq K_1}$$

$K_1 = ;$

Θ_0 : Ho αληθ

$P(\Sigma X_i \geq k_1 \,/\, X_i \sim \text{Γάμμα}(3, 1/2)) = a \Rightarrow$

$P(\Sigma X_i \geq k_1 \,/\, \Sigma X_i \sim \text{Γάμμα}(3n, 1/2)) = a \Rightarrow$

Στην Γάμμα θέλω να εμφανίσω το 2 στη θέση του 1/2

$\Rightarrow P(4\Sigma X_i \geq 4k_1 \,/\, 4\Sigma X_i \sim \chi^2_{\underbrace{6n}_{2\cdot 3n}}) = a \Rightarrow$

Γάμμα (3n, 2)

$\Rightarrow \quad 4k_1 = \chi^2_{6n,a}.$

Επομένως $4\Sigma X_i \geq \chi^2_{6n,a}.$ Δεν εξαρτάται η τιμή απορ. από το Θ_1.

Επομένως αυτό που βρήκα είναι το ομοιομόρφως ισχυρ.